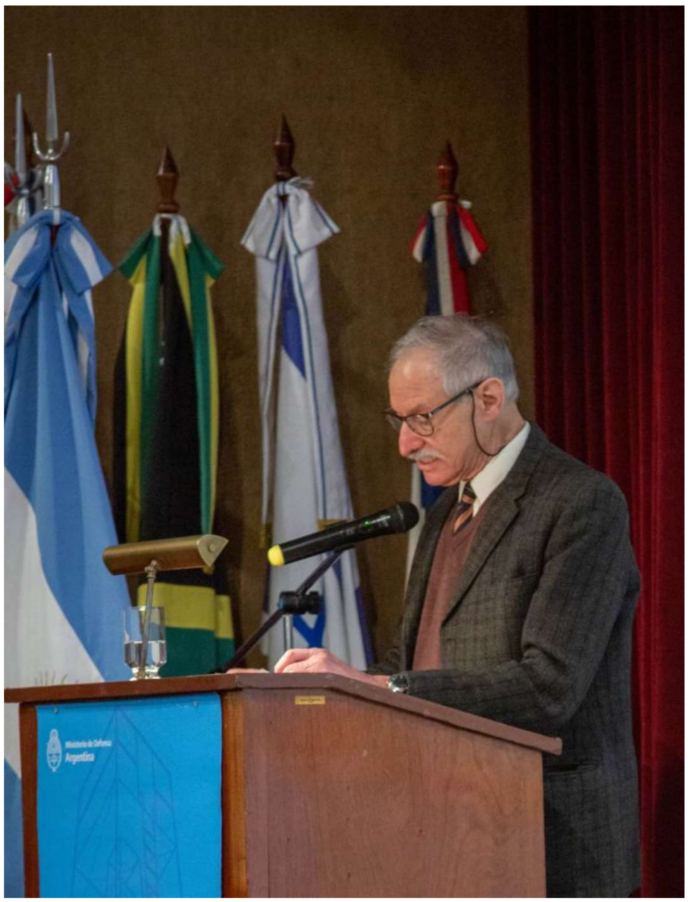
GEOGRAFÍA Y MATEMÁTICAS:
UNA ESTRECHA RELACIÓN

Académico Pablo Miguel Jacovkis



Dr. Jacovkis, disertando

Estimado Presidente de la Academia Nacional de Geografía, estimados académicos y académicas, estimados participantes en este acto de incorporación.

Ante todo, querría manifestarles que para mí es un honor que la Academia me haya invitado a ser miembro de la misma, invitación que acepto con mucho placer y orgullo. En particular, me honra ocupar el sitial Burmeister. Hermann (o Germán, al castellanizar su nombre) Burmeister había hecho una distinguida carrera en Alemania (para ser más precisos, era profesor en Halle, en Prusia –Alemania todavía no estaba unificada) cuando en 1861, a los 54 años, decidió radicarse definitivamente en Argentina, país que ya conocía de sus viajes anteriores por América del Sur, donde había recolectado valiosas colecciones. Su sugerencia, a través del enviado de la

Confederación Germánica, de hacerse cargo del Museo Público de Buenos Aires, el actual Museo Argentino de Ciencias Naturales Bernardino Rivadavia (que, dicho sea de paso, es la institución científica más antigua de nuestro país), fue rápidamente aceptada por el gobernador Mitre y su ministro Sarmiento (siempre aparece el nombre de Sarmiento en las actividades educativas o científicas argentinas de la segunda mitad del siglo XIX), y después de algunas peripecias ocupó su puesto de director hasta su muerte en 1892. Su actuación fue clave para convertir el museo en una institución de primer nivel, como puede verse en el espléndido libro[1] que el museo editó para conmemorar sus 200 años. Burmeister fue uno de los científicos que los dirigentes argentinos de la época supieron traer y su presencia en Buenos Aires –y en Córdoba, donde también tuvo una significativa actuación- y participación en conflictos y discusiones muestran cómo se había consustanciado con su nuevo país, al cual había llegado a una edad ya no muy juvenil. Y su compenetración con el museo fue tan grande que en última instancia fue lo que acabó con su larga y fructífera vida: siendo director ¡a los 85 años, en 1892! sufrió un accidente de trabajo, que provocó su retiro como Director y pocos días después su fallecimiento.

Quiero referirme también a los dos académicos que me precedieron en ocupar este sitial: los doctores José María Gallardo y José Alberto Hoffmann. El Dr. Gallardo, especializado en herpetología, hizo honor a un apellido ilustre y estuvo a su altura: nieto de un eminente científico y político, primo de una escritora excepcional, fue profesor universitario e investigador del Conicet, y dirigió hasta su fallecimiento el Museo Argentino de Ciencias Naturales durante más de veinte años, período en el cual mantuvo y aumentó el prestigio de dicho museo. Y el Dr. Hoffmann, que era meteorólogo, Premio Konex de Platino 1993, profesor de la Universidad de Buenos Aires, donde llegó al máximo honor de ser designado profesor emérito, entre sus muchas publicaciones tiene en su haber el Atlas Climático de América del Sur,[2] obra ciclópea y de consulta dirigida por él, para la Organización Meteorológica Mundial, y que fue publicada en castellano, inglés, francés y portugués, y el capítulo de historia de la meteorología, oceanografía y radiopropagación en el período 1923-1972 del magnífico volumen[3] de evolución de historia de la ciencia encomendado por la Sociedad Científica Argentina, además de calificadas publicaciones, incluso en colaboración con el académico que me honró al presentarme hace unos minutos a esta Academia;[4] en sus clases siempre insistía además en la influencia de las condiciones meteorológicas sobre la morbilidad y mortalidad humanas, e incluso preparó una clasificación de dicha influencia (la “clasificación de Hoffmann”). Espero estar a la altura de mis predecesores.

He titulado esta exposición “Matemáticas y geografía: una estrecha relación”, para responder a la pregunta que puede formularse acerca de la pertinencia de la incorporación de un matemático a la Academia Nacional de Geografía. La geografía es una disciplina transversal a muchas otras, y la composición a lo largo de los años de esta Academia es un reflejo de ello: ha habido y hay geógrafos, ingenieros,

[1] Penchaszadeh (2012).

[2] Hoffmann (1975).

[3] Sociedad Científica Argentina (1972).

[4] El Dr. Mario Néstor Núñez.

meteorólogos, biólogos, militares, marinos, médicos, arquitectos, diplomáticos… y ahora habrá un matemático. Pero no debería llamar la atención. La matemática y la geografía están profundamente entrelazadas. Hagamos un poco de historia: en Occidente, la matemática "empírica", es decir, sin demostraciones y simplemente aceptando algunas reglas por razones experimentales, era utilizada con propósitos impositivos, censales, astronómicos (en forma que puede considerarse muy cercana a la geografía)… y para mensura, cálculo de distancias entre localidades, y muchas otras actividades claramente del ámbito de la geografía. Cuando en Grecia la matemática se convirtió en una ciencia, es decir, cuando los griegos, en un toque incomparable de genio, a partir de Pitágoras y de su escuela, y sobre todo a partir del libro inmortal de Euclides (que durante mucho tiempo fue el libro más leído en el mundo, o al menos en Occidente, después de la Biblia) empezaron a usar demostraciones matemáticas a partir de axiomas básicos, la geografía recibió un espaldarazo muy significativo. Eratóstenes, uno de los primeros geógrafos (y el más completo de la antigüedad), era además matemático y astrónomo (además, parece ser, de poeta y filósofo); su cálculo de la medida de la circunferencia de la Tierra, aunque aproximado, es una obra maestra de combinación del método deductivo con el experimento, con uso de la trigonometría –área de la matemática cuya relación con la geografía es casi obvia- para producir un gigantesco avance en el conocimiento de la geografía de la Tierra. Acuñó el término "geografía" (en griego, por supuesto), y sus admirables aportes pueden verse, por ejemplo, en el fenomenal trabajo de recopilación de fragmentos de su opera magna,[1] que lleva naturalmente ese nombre, traducidos al inglés por Duane W. Roller, quien además los completó con comentarios al respecto.

Haré en esta exposición un breve análisis de la matemática como herramienta de la geografía (evitando la formulación de ecuaciones o desigualdades, para mayor sencillez), y mencionaré también cómo la geografía puede inspirar a la matemática; mencionaré en la última parte de mi exposición las herramientas más modernas de la matemática, pues lo que se puede constatar fácilmente es que el desarrollo matemático de estas últimas décadas ha facilitado el desarrollo de instrumental que, a su vez, se ha convertido en auxiliar fenomenal de la geografía. Pero debe quedar claro que mi exposición dará solamente un pantallazo de las aplicaciones, con alguno que otra mención concreta o ejemplo, y con muchas omisiones, dado que una reseña completa de aplicaciones de la matemática a la geografía me llevaría mucho más tiempo del que preveo para esta exposición. Y–sobre todo cuando me refiera a lazos más recientes entre ambas disciplinas, en los cuales es inevitable la presencia de la computadora-, indicaré herramientas computacionales, de ésas que están en la difusa frontera entre matemática y computación (podría haber llamado a esta exposición "Geografía, matemática y computación: una estrecha relación", pero me pareció que era mejor un nombre más corto, y por eso quedó así: de todos modos, las herramientas computacionales que mencionaré se pueden considerar, desde cierto punto de vista, herramientas matemáticas). Por supuesto, no pretendo ser particularmente original tan luego en la Academia Nacional de Geografía; mi intención es analizar un poco como matemático aplicado la estrecha relación que existe desde siempre entre matemáticas y geografía. Y, naturalmente, las áreas matemáticas aplicables en geografía son muchas más que las que yo domino o de las cuales conozco un poco.

[1] Erathostenes (2010).

Si tomamos por ejemplo (entre muchas otras posibles y similares) la definición de geografía (que se puede ver en internet) del *Cambridge Dictionary***,** tenemos que la geografía es el estudio de los sistemas y procesos involucrados en el tiempo, montañas, mares, lagos, etc., del mundo, y de las maneras mediante las cuales los países y los pueblos organizan la vida en una región. Por supuesto que basta hurgar un poquito en internet para encontrar muchas otras definiciones, pero esta definición (como todas las otras, con mayor o menor detalle) satisface la idea intuitiva que uno tiene de la geografía, que permite dividirla, en primera aproximación, en geografía física y geografía humana. Y en ambas ramas de la geografía la matemática se inmiscuye, y mucho. Por supuesto que puede haber otras clasificaciones: una clasificación un poco distinta, pero a mi juicio también digna de atención, es la que indica el profesor Freile en su trabajo de 1954 sobre la necesidad de matemáticas en la geografía: 1) Ciencia del planeta; 2) Ciencia de las relaciones (naturaleza respecto de la naturaleza, naturaleza respecto de los seres humanos y de los seres humanos respecto de la naturaleza), y 3) Ciencia de las distribuciones (fenómenos de ocurrencia cultural o natural). Como dice Freile, "el geógrafo necesita la matemática como ayuda para coordinar aquellas experiencias para las cuales los criterios cualitativos no alcanzan para brindar un sistema lógico completo". Es interesante el listado de las áreas de la matemática usadas en geografía que hace Freile en 1954: álgebra, geometría (teórica, dividida en plana y esférica, y aplicada, dividida en sólida y estereométrica), determinantes y análisis de curvas, trigonometría (plana y esférica), geometría analítica, cálculo infinitesimal y probabilidades. Independientemente de algunas imprecisiones (por ejemplo, probablemente Freile incluyó la estadística dentro de las probabilidades), vemos que algunas de esas áreas, como la geometría, son muy antiguas; el álgebra en su forma actual (independiente de la geometría) empezó más o menos a enfocarse en el siglo IX, con los aportes del gran matemático persa al-Khwarizmi (en esa época la joven civilización islámica era muchísimo más avanzada y refinada que la europea), el cálculo infinitesimal con Newton y Leibniz en el siglo XVII y las probabilidades, también en el siglo XVII, con los aportes de Pascal y Fermat, curiosamente incitados por un empedernido jugador de cartas (por dinero, naturalmente), el caballero de Méré.

Pues bien, ahora, poco más de sesenta años después, la lista de áreas matemáticas utilizadas en geografía es muchísimo mayor, como veremos; eso sí, con una importante diferencia: es probable (y eso lo tienen que decidir los geógrafos, no los matemáticos, por supuesto) que en un plan de estudios de geografía muchas de las áreas indicadas por Freile deban figurar, aunque sea sin un enfoque tan riguroso como les gusta a los matemáticos, mientras que los conocimientos de las nuevas áreas deberán ser muchísimo más superficiales (por falta de tiempo para adentrarse en campos matemáticos muy avanzados): quienes se dedican a la geografía son geógrafos, no matemáticos o informáticos; deberán saber usar las herramientas matemáticas, sus capacidades y sus limitaciones, pero no es necesario que dominen mucho más que eso, salvo que les interese particularmente. Por supuesto los geógrafos son plenamente conscientes del cada vez mayor uso de la matemática (en particular de "nueva" matemática) en su disciplina, como lo observó perfectamente Cochlaine King en un artículo publicado ya en 1970. King resalta en particular la aparición del análisis de patrones de puntos, en particular análisis de redes; esos patrones pueden ser estáticos o dinámicos, los cuales cambian con el tiempo debido, muy probablemente, a diversos procesos: y si tenemos sobre una misma región dos distribuciones de patrones distintas, muy probablemente se requerirán técnicas estadísticas para analizarlas.

A mi juicio, hubo dos grandes momentos en la historia de la matemática que influyeron profundamente en su relación con la geología como instrumento de ella: uno fue la invención del cálculo diferencial e integral casi en simultáneo con la formulación rigurosa de la teoría de las probabilidades, y el otro es la aparición de la computadora. Por supuesto la computadora influyó primero en la matemática, permitiendo el desarrollo de nuevas áreas relacionadas sea con el análisis numérico, sea con el tratamiento de datos (se puede decir que, simplemente, la computadora permitió hacer cuentas más rápido con muchos más datos, y hacer muchas cosas nuevas muy valiosas con esa cantidad nueva de datos); simultáneamente, a medida que la capacidad de almacenamiento de las computadoras creció vertiginosamente, el propio manejo de datos se convirtió en un área de la ciencia de la computación (un área con muchas facetas matemáticas) que hasta llegó a "independizarse" con el nombre de ciencia de datos, obviamente con muchas aplicaciones en geografía, porque, si se consigue adquirir los datos (y actualmente se lo consigue) la geografía puede proporcionar todos los que se requieran, e incluso muchos más, si se lo propone, de los que se pueden procesar. De hecho, puedo mencionar que recientemente se aprobó una nueva carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, la licenciatura en ciencia de datos, carrera planeada entre el Departamento de Computación, el Departamento de Matemáticas y el Instituto de Cálculo de dicha Facultad, y las primeras inscripciones de alumnos muestran un llamativo y agradable éxito de la idea de crear esa carrera, con lo cual no dudo de que en los próximos años los geógrafos argentinos cuenten con un significativo apoyo matemático para sus actividades.

De las aplicaciones "clásicas" de la matemática (o, más propiamente, de la geometría) en la geografía sigue siendo incomparable, en mi opinión, el deslumbrante libro *Mathematical Geography*, de Willis Johnson, pese a que fue publicado en 1907; el Proyecto Gutenberg ha tenido la gentileza de subirlo a internet para que todos puedan disfrutar de él libremente. Un somero análisis del libro, dedicado a geografía global de la Tierra, nos permite observar que se aplican muchísimos conceptos geométricos, particularmente en proyecciones de mapas: proyección ortográfica, proyección estereográfica, proyección globular, proyección gnomónica, proyección homolográfica, proyecciones cilíndricas (gnomónica, estereográfica, Mercator), proyecciones cónicas; luego se analiza también la triangulación en mensura, la geografía matemática de los planetas, la luna y el sol, el tratamiento matemático de las mareas.

He mencionado a Gerardus Mercator, el gran geógrafo, cosmógrafo y cartógrafo. Mercator publicó en 1569 su famoso mapa, cuyo título traducido del latín es "Nueva y ampliada descripción de la Tierra, con mejoras para su uso en navegación". Entre las muchas razones por las cuales ese extraordinario mapa (que no sabemos cómo Mercator lo construyó) es importante es *porque es conforme*, es decir, preserva ángulos. La proyección estereográfica también preserva ángulos, pero aparentemente hasta el Renacimiento sólo se usó en cartas celestes. El mérito de Mercator es enorme, su mapa tuvo una importancia fundamental para la cartografía y para la navegación (y en cartas náuticas se sigue usando). Pero quería detenerme en otra cosa: en matemáticas la noción de aplicación conforme empezó a ser realmente manejada con precisión después de la invención en el siglo XVIII (alrededor de dos siglos después) del análisis complejo; aquí, en algún sentido laxo, la geografía "precedió" a las matemáticas; cabe mencionar que probablemente el primer cartógrafo matemático fue Johann Heinrich Lambert, que en 1772 publicó en alemán su magna obra, que traducida al castellano es

"Notas y comentarios sobre la composición de mapas terrestres y celestes", con lo cual –dos siglos después de Mercator- inauguró la cartografía matemática. George Heine (2004) indica que el gran matemático Lagrange considera que Lambert fue el primero que caracterizó el problema de la aplicación de una esfera en un plano, preservando alguna propiedad dada, en términos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Con la invención por parte de Newton (y Leibniz, aunque la disputa entre ambos por la prioridad científica no es motivo de esta exposición) del cálculo diferencial e integral, la relación entre geografía y matemáticas se amplió, al aumentar poderosamente la cantidad (y potencia) de las herramientas matemáticas a disposición de los geógrafos, y la posibilidad de hacer aseveraciones *antes* de su constatación experimental (lo cual es, por otra parte, uno de los basamentos de la ciencia); un importante ejemplo de esto, muy relacionado con geografía, y en el cual Sudamérica en algún sentido interviene, fue la constatación –predicha por Newton- de que la tierra estaba algo achatada en los polos. La Academia de Ciencias de Francia, en la década de 1730, encomendó dos expediciones para medir la longitud de un grado de arco de meridiano, una cerca del Ecuador –para lo cual una expedición viajó al Ecuador (y sus peripecias fueron fascinantes, como indica Jim R. Smith en un artículo de 2002) y la otra a Laponia, dirigida por el matemático Pierre Louis Maupertuis. Los datos de ambas expediciones corroboraron la teoría de Newton; en cierto sentido, esa corroboración es bastante análoga en cuanto a su impacto científico a la corroboración en 1919, por parte de la expedición de Eddington, de la relatividad general de Einstein.

Dicho sea de paso, el impacto de la corroboración de la predicción de Newton provocó los deliciosos versos satíricos de Voltaire (un hombre del cual era mejor ser amigo que enemigo, al menos para la posteridad) dedicados a Maupertuis:

"Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui. Ce que Newton connu sans sortir de chez lui." O sea, *"Usted ha confirmado en esos lugares llenos de aburrimiento. Lo que Newton supo sin salir de su casa."*

Es decir, se podría decir que fue la geografía terrestre la que permitió aceptar la teoría de Newton. Casi nada.

Dado que la Tierra, como supuso Newton, no es una esfera exacta, sino que, como acabo de comentar, está achatada en los polos (para predecir lo cual la contribución de las herramientas matemáticas y teoría física planteadas por el mismo Newton fue crucial), para el cálculo del arco de meridiano (y del radio de curvatura del meridiano) la matemática usada no es tan simple como lo sería si la Tierra fuera una esfera, e intervienen aproximaciones, integrales elípticas, etc. Ya la geometría se pone compleja y pide ayuda al cálculo integral. La matemática dura y pura es indispensable para estos cálculos, y aparecen series numéricas, integración numérica… y permanentemente nuevos métodos son propuestos, para los cuales también es necesario el empleo de técnicas de análisis numérico, puesto que no siempre (o, mejor dicho, pocas veces) las fórmulas empleadas permiten el cálculo directo. Al respecto, uno de los más ambiciosos proyectos científicos y tecnológicos encarados en nuestro país fue la medición de un arco de meridiano, tarea a cargo de una Comisión del Arco, y que fue aprobada en 1936 por ley del Congreso; durante la primera parte del trabajo de dicha Comisión (concretamente, hasta 1941, en que retornó a España) fue fundamental la colaboración con ella del distinguido matemático español Esteban Terradas, residente en Argentina desde 1936 con motivo de la guerra civil española, como detalla Eduardo Ortiz[1] en su enjundioso artículo sobre la medición del arco de meridiano en Argentina. Es decir, en algún sentido nosotros también tuvimos muy tempranamente un proyecto de lo que hoy se llamaría "big science".

Es interesante observar que, pese a que la medición del meridiano se puede llevar a cabo mediante la aplicación de fórmulas matemáticas sólidas y muy fundamentadas, se sigue pudiendo proponer fórmulas alternativas interesantes, variando ligeramente los enfoques, lo cual es un ejemplo de la riqueza de las investigaciones en temas que, a primera vista, uno podría suponer ya completamente estudiados (naturalmente, esto no significa que nuevas fórmulas sean necesariamente mejores, pero sí que incentivan, a partir de problemas de la geografía, a veces más simples, a veces más complejos, la resolución de problemas matemáticos). Un caso que pongo como ejemplo es el del trabajo de 2002 de los profesores brasileños Oliveira y Ferreira con un nuevo enfoque para la determinación del arco de meridiano.

De paso, un importante problema geográfico, crucial para la navegación, la determinación de la longitud, si bien fue solucionado por el talentoso relojero John Harrison, como relata por ejemplo el atractivo libro[2] *Longitude*, de Dava Sobel (un ejemplo de la geografía incitando a la mejora de la construcción de relojes mecánicos), promovió, antes de la solución de Harrison, que mentes brillantes de la ciencia estudiaran el problema, usaran ampliamente la matemática (y la astronomía) y permitieran la solución de varios problemas científicos no triviales, entre ellos el primer cálculo de la velocidad de la luz. O sea, el impacto de la geografía sobre las matemáticas –y sobre muchas otras disciplinas- es considerable. La relación fue siempre de ida y vuelta: no es que las otras ciencias "permitieron" el desarrollo de la geografía: también la geografía "permitió" el desarrollo de las otras ciencias (y de la tecnología, como indica por ejemplo la historia de la determinación de la longitud), y entre ellas de la matemática.

Pasemos ahora por un momento a analizar cómo fue la geografía la catalizadora, en el siglo XVIII, de una de las ramas más importantes y productivas de la matemática actual, la teoría de grafos: la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental (actualmente Kaliningrado, en Rusia), famosa por ser la ciudad natal del gran filósofo Emmanuel Kant y la ciudad donde se crio y estudió el gran matemático David Hilbert, está atravesada por el río Pregel e incluye dos islas, comunicadas entre sí y con el resto de la ciudad mediante siete puentes. El gran matemático Leonhard Euler se planteó el problema de una caminata que pasara una vez sola por cada uno de los puentes y visitara toda la ciudad, y demostró que eso era imposible, con lo cual dio comienzo la actual teoría de grafos, rama muy importante de la combinatoria.

La asociación de los grafos, por ejemplo, con el análisis de redes de desagüe es casi instantáneo: en ese caso, obviamente, los grafos son usualmente planos (no hace en general falta, al menos en primera instancia, la dimensión adicional dada por la profundidad). Obviamente –también como grafo plano- una red se puede extender al seguimiento de rutas de vehículos de transporte automotor urbano, de ferrocarriles

[1] Ortiz (2005).

[2] Sobel (1996).

urbanos, de subterráneos (aunque, en este caso, es posible que según la red el grafo no sea más plano sino en tres dimensiones). Y por supuesto para líneas de ferrocarril regionales, nacionales e internacionales. Todos temas en los cuales interviene la geografía. Las aristas del grafo pueden representar distancias, o capacidad máxima transportable en un momento dado a través de la arista, u otra restricción, o varias de ellas juntas. Según razones físicas o reglamentarias se pueden probar teoremas que faciliten el diseño de la red.

Otro interesante ejemplo de geografía "incitando" avances matemáticos es el que dan en un trabajo de 1980 de Rickey y Tuchinsky. La integral indefinida de la secante de un ángulo α es el logaritmo del valor absoluto de la secante de dicho ángulo α más su tangente, más una constante,[1] como corresponde cuando uno trabaja con integrales indefinidas. Sin entrar a analizar la historia de esta "incitación" (que se lee amenamente en el trabajo citado), lo cierto es que los conocimientos acumulados de geógrafos y navegantes (usando los avances ya realizados por Mercator) inspiraron a Henry Bond (que se autodefinía como "maestro de navegación, agrimensura y otras partes de la matemática") en 1645 a conjeturar dicha fórmula (para ser más precisos, usaba otra ecuación trigonométricamente idéntica a la que mencioné),[2] gracias a lo cual Isaac Barrow dedujo correctamente la fórmula de la integral. Nótese que en esa época obtener fórmulas explícitas (y calculables) de integrales de funciones era mucho más importante que ahora, pues no existían las computadoras, a partir las cuales se diseñaron métodos de integración numérica muy eficientes, o sea tener valores razonables (que sí se podían obtener a partir de logaritmos de funciones trigonométricas) de integrales de funciones trigonométricas era extremadamente útil.

La estadística es otra rama de las matemáticas que ayuda a la geografía (admitiendo que la estadística es una rama de las matemáticas, por supuesto: se puede pensar también la estadística como una ciencia natural, la más matematizada de todas –más que la física, incluso- pero ese es otra discusión que nos aleja del meollo de esta presentación): si bien los censos son muy importantes, y la recomendación de la Dirección de Estadísticas de las Naciones Unidas es que se haga un censo nacional cada diez años, muchas veces se requieren datos poblacionales alejados de la fecha de los censos (por ejemplo, emigraciones o inmigraciones súbitas, crecimiento y decrecimiento humano producidos y estimados para el futuro) para los cuales encuestas bien hechas, con una base teórica estadística sólida, dan resultados que pueden ser excepcionalmente precisos. En cuanto a geografía urbana, la estadística ocupa un lugar importante en este ámbito: herramientas de estadística usadas son análisis multivariado de agrupamientos (multivariate cluster analysis), análisis de regresión, etc. Y en hidráulica fluvial, por ejemplo, la estadística puede ser muy útil para averiguar si –debido por ejemplo al calentamiento global- en algún río importante, por ejemplo, el río Paraná, hay cambios temporales, que puedan llevar a suponer tendencias futuras, en las alturas medias del río en distintos puntos de medición, con obvias consecuencias, entre otras cosas, en previsiones sobre posibilidad de navegación por ese río por barcos de determinado calado.

[1] $\int \sec \alpha \, d\alpha = \ln \left| \sec \alpha + \tan \alpha \right| + c$.

[2] $\ln \left| \tan (\alpha/2 + \pi/4) \right|$.

Un tipo de problema estadístico que se presenta muchas veces, en hidráulica fluvial, es tener estimación de la probabilidad de una crecida inusual (por ejemplo, una crecida centenaria, que en el lenguaje de los hidrólogos es una crecida con una posibilidad de uno en cien de producirse). De más está decir lo importante que es esa estimación, dado que puede permitir un cálculo de cuánto riesgo se está dispuesto a correr.

Para obtener esa estimación se analiza con cuidado el régimen del río bajo estudio (teniendo en cuenta, si se quiere ser más perfeccionista, una tendencia posible a modificación de régimen del río debida por ejemplo al calentamiento global), y a partir de los máximos anuales en los puntos de interés, se ajustan dichos datos a diversas distribuciones estadísticas, y, si todo va bien, se pueden simular crecidas de diferente probabilidad. En particular, este análisis es clave en un proceso de diseño de represas: una represa se diseña para que resista una crecida de determinada probabilidad. Algo en cierto sentido similar sucede durante la construcción de represas: el problema (típico en este tipo de obras) es qué hacer cuando viene una crecida importante: si la crecida es muy importante, hay que evacuar el obrador, y si no, no.

Ahora bien, por supuesto la decisión hay que tomarla con cierta anticipación, cuando no está claro cuán importante será la crecida, y entonces se pueden cometer dos tipos de errores, que usando terminología de estadística llamaré errores de tipo I y errores de tipo II. Si la hipótesis "nula" es que la crecida no será tan grave como para tener que ordenar la evacuación del obrador, y el director de obra cree que sí habrá una inundación del obrador, por lo cual será necesario evacuarlo (también se podría decir un "falso positivo"), habrá un costo económico importante por días de suspensión de obra, más el costo del traslado de los equipos sin ninguna necesidad. Y si, a la inversa, el director de obra considera que la crecida es "normal", o sea no provocará inundación del obrador, y sí lo provoca ("falso negativo"), también el costo es alto (probablemente más alto) debido no solamente a los días sin trabajar, sino a que, eventualmente, varios equipos se pueden arruinar. En particular comento que este problema lo conozco bien porque implementé modelos predictores de crecidas con este enfoque durante la construcción de la represa de Salto Grande, que tomaban en cuenta los pronósticos de lluvias en la alta cuenca, dividida en subcuencas. Cada día se tomaban las predicciones de lluvias en la alta cuenca, que se propagaban mediante el modelo de ecuaciones diferenciales por los ríos de la cuenca, y cada día era necesario actualizar algunos datos predichos, reemplazándolos por los conocidos en ese momento. Y esto nos lleva a otro problema, esta vez de "clustering", o agrupamiento: los pluviómetros existentes no son necesariamente representativos de las subcuencas (definidas por razones geográficas) con las que se trabaja: los pluviómetros –sobre todo en un país no muy desarrollado- están en general en lugares poblados (estaciones de ferrocarril, por ejemplo). Acá vale la pena el siguiente comentario: por supuesto que usualmente se dispone de gran cantidad de datos, pero eso no quiere decir que existan grandes cantidades de datos para todas las variables que queremos utilizar: en los países subdesarrollados pueden faltar datos impensables en un país desarrollado, e incluso en los países desarrollados puede haber zonas donde no hay suficientes datos: un lindo ejemplo de esto es Australia: basta mirar en internet un mapa de Australia que indique la densidad de pluviómetros para observar las enormes áreas casi sin cobertura, aunque eventualmente pudiera ser útil tener dicha cobertura. ¿Cómo asignar entonces pluviómetros a subcuencas? El problema matemático de "clustering", o agrupamientos, es el siguiente: si se tiene una cantidad de conjuntos (en geografía es común que esos conjuntos representen regiones, en este caso subcuencas) y una cantidad de objetos “individuales” (puntos, por ejemplo), a qué conjunto asignar cada punto, mediante una función matemática discriminatoria que represente el motivo por el cual queremos hacer tal asignación. Aclaro que más difícil es un problema previo, que a veces se presenta, de decidir cuántos y cuáles serán los conjuntos, y a partir de allí comenzar la asignación (por supuesto, que el estudio, cualitativo o cuantitativo, de los puntos, influye en la determinación de los conjuntos). Así se puede resolver, discretizando cada cuenca en áreas más pequeñas (o sea, los conjuntos a los cuales se asignan datos de pluviómetros no son las subcuencas sino esas áreas más pequeñas) que reciben la parte proporcional de lluvia del pluviómetro asignado, pero con un algoritmo que tenga en cuenta que, desgraciadamente, hay días en que un pluviómetro no funciona, porque no se midió (recuerden que no está todo automatizado, y mucho menos en esa época y en esos lugares), o porque no llegó la transmisión. O sea que las cuencas por supuesto están fijas, pero los pluviómetros a asignar no. En esto trabajé muchas veces diseñando modelos predictores, y es una experiencia muy enriquecedora. En particular, el primer modelo que hice fue en una computadora GE-105, de 16 Kb de memoria en total, cuyos periféricos eran cintas, no tenía discos de acceso directo, o sea tenía que diseñar todo para que la búsqueda fuera lo más rápida posible…

El cálculo de los caudales y de las alturas de los ríos en diversos puntos puede llegar a ser un problema importante si se quiere diseñar represas, prevenir inundaciones, construir puentes, u otras actividades similares. Mediante el uso de grandes modelos matemáticos en una, dos o tres dimensiones (si se trata de una dimensión, es la del flujo longitudinal del caudal del río; si se trata de dos, puede ser, además del longitudinal, el transversal o el vertical), y conociendo la forma del correspondiente río a lo largo de su recorrido, se puede, conociendo algunos datos hídricos en algunos puntos a lo largo del tiempo, reconstruir (si se quiere saber valores históricos), experimentar (es decir, calcular los valores que hay bajo diversas hipótesis de esos valores “extremos” conocidos) o predecir (si se quiere saber valores futuros, para lo cual los datos hídricos a los cuales me referí antes no son conocidos sino predichos, por razones meteorológicas, por ejemplo, gracias a la previsión de lluvias). Esos grandes modelos matemáticos usan complicadas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuya teoría y solución (usualmente numérica, no suele haber, salvo casos muy simples, solución analítica) han constituido avances importantes en matemática pura y aplicada. Concretamente, el sistema de dos ecuaciones diferenciales hiperbólicas en derivadas parciales casilineales que rigen el flujo unidimensional de un río (las ecuaciones de Saint-Venant de la hidráulica fluvial) puede ser resuelto numéricamente; además, se puede agregar una ecuación adicional para indicar el transporte de material de fondo, y una cuarta ecuación, ésta última parabólica, si se quiere modelizar también las partículas en suspensión (por ejemplo, contaminantes) que eventualmente pueden decaer o resuspenderse, de acuerdo a la velocidad del agua.

He diseñado y adquirido una larga experiencia en estos modelos a lo largo de muchos años, e incluso pude modelizar el fenómeno de *antiduna*: bajo ciertas circunstancias, una duna retrocede en vez de avanzar (naturalmente, lo que retrocede es la *forma*, no cada una de las partículas, que avanzan siempre empujadas por el agua, si el flujo no cambia de dirección).

De hecho, es muy interesante observar que en el informe sobre prolongación del ferrocarril central-norte Metán-Salta-Jujuy publicado en los *Anales de la Sociedad*

Científica Argentina en 1884[1] (informe de una precisión y meticulosidad notables, que muestra la visión de futuro del país de la generación de 1880, que a veces da envidia por comparación) figura la siguiente frase (se está analizando la construcción de los puentes ferroviarios necesarios para dicha prolongación del ferrocarril): *"Río Chicoana: No ha sido posible formarse una idea exacta del volumen de agua que puede conducir este río en tiempos de creciente.*"

En esa época no se tenían los elementos matemáticos (métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales) ni computacionales (computadoras sobre las cuales se pudieran hacer los cálculos) como para poder solucionar este problema. Ahora, por el contrario, uno se puede formar una idea razonablemente exacta.

En todo lo relacionado con el transporte la relación entre matemática y geografía es muy estrecha. Por un lado, la construcción de ferrocarriles y rutas siempre necesita un asesoramiento geográfico importante (la ruta más corta no es necesariamente la mejor, por supuesto, o el puerto o aeropuerto deben ser construidos en un lugar óptimo en el cual los criterios geográficos son fundamentales) y las variables que intervienen (costo de construcción y mantenimiento, carga de mercadería –o de pasajeros- prevista a lo largo de un horizonte de varios años, y su correspondiente beneficio, costo de la energía necesaria para el transporte, y otras variables de más difícil cuantificación pero cada vez más importantes, como reemplazo de energía contaminante por energía limpia, satisfacción del usuario, política de regionalización o de desconcentración humana, etc.) están sujetas a restricciones físicas o legales que implican la necesidad de llevar a cabo modelos de optimización bajo restricciones (sean éstas lineales, no lineales, discretas) o modelos de simulación donde se "experimenta numéricamente" bajo distintas alternativas, que requieren la aplicación de métodos matemáticos desarrollados esencialmente a partir de la segunda guerra mundial, incluyendo entre éstos, si la simulación es estocástica (o sea si se intenta obtener resultados que dependen también parcialmente del azar) el curioso fenómeno de "representar" las probabilidades por medio de algoritmos computacionales, lo cual parecería un contrasentido (cómo se puede simular resultados probabilísticos en un aparato –la computadora- que produce resultados determinísticos) pero no lo es, gracias a la invención de sucesiones pseudoaleatorias de números, es decir, números que, aunque por supuesto fueron generados mediante procedimientos determinísticos, se comportan como si fueran aleatorios, en el sentido de que, si bien no son aleatorios, un estadístico profesional no puede detectar esa falta de aleatoriedad –incluso con las poderosas herramientas actualmente a su disposición.

Siguiendo con el transporte, en la construcción de ferrocarriles en Argentina, en particular en los dos ferrocarriles transandinos que Argentina y Chile supieron llevar a cabo (el de Mendoza-Los Andes y el de Salta-Antofagasta) las consideraciones geográficas fueron fundamentales, y provocaron numerosas discusiones en que intervino la matemática, así sea para calcular (en muchos casos con bastante dificultad) posibles costos y beneficios. Valga comentar que en la accidentada historia de la construcción del ferrocarril de Mendoza a Los Andes el primer proyecto, que no llegó a concretarse, tenía del lado argentino una participación fundamental del matemático e

[1] Giagnoni y White (1884).

ingeniero Emilio Rosetti, uno de los profesores italianos incorporados al flamante Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires en 1865, tras gestiones de las autoridades argentinas; cuando se ve que en ese momento, en un país pobre, casi ignorado, inmerso en una guerra horrible con el Paraguay, guerra que se complicó con una casi guerra civil, hubo voluntad política –como la que hubo para atraer a Burmeister unos pocos años antes- de apostar por la ciencia, por la tecnología y por el desarrollo, uno se queda admirando a esa generación de estadistas, profesionales e intelectuales que llevaron a cabo la organización nacional. En ese sentido, es necesario, a mi juicio, una revalorización completa del ferrocarril como medio de transporte, y a eso me referí en mi ponencia en el segundo congreso argentino de transporte de 2017 y en un artículo de 2018, ampliación del anterior, en el cual comparé la (casi suicida) actitud argentina respecto de los ferrocarriles con la de varios países (Canadá, Australia, Rusia, India, China, Sudáfrica) de inmensa geografía, algunos de ellos de desarrollo menor que el nuestro, que en lugar de abandonarlo como medio lo han reforzado, como ejemplo de camino a seguir. Tuvimos una red de ferrocarriles que, a pesar de sus defectos (esencialmente, embudo hacia Buenos Aires y tres trochas diferentes) fue un orgullo para nuestro país y en Latinoamérica. Debemos volver a serlo. La Red Universitaria de Transporte, en la cual participo, es uno de las herramientas para concientizar a las autoridades y a la población.

Pero la relación entre geografía, matemáticas y transporte es más amplia: después de la segunda guerra mundial se produjo en los países desarrollados un aumento del nivel de vida que permitió a gran cantidad de familias de clase media (y unas cuantas de clase obrera) poder adquirir automóviles para su uso particular (antes de la segunda guerra mundial ese fenómeno se había producido solamente en Estados Unidos). Aumentó la construcción de rutas, en muchos casos autopistas, y la cantidad de vehículos en circulación provocó que los atascamientos se produjeran con desagradable frecuencia. Y apareció la matemática, de nuevo, en forma muy original: la teoría de flujo de tránsito en rutas se pensó como una versión de dinámica de fluidos, bajo ciertas restricciones, y aparecieron las ecuaciones hiperbólicas correspondientes. El libro de Ashton de 1966 resume muy bien esa idea, que se les ocurrió a los brillantes matemáticos Michael Lighthill y Gerald Whitham y que plasmaron en un artículo seminal en 1955. El análisis de flujo de tránsito puede llevar a construcciones de rutas adicionales, o de rutas con más carriles, tema en el cual obviamente interviene la geografía, y en el cual es mucho mejor, tanto por razones de diseño como por razones de costo, que los eventuales embotellamientos futuros puedan ser predichos y, por consiguiente, con modificación del diseño original, evitados.

Otra rama de la matemática utilizada actualmente en geografía es la optimización lineal, no lineal y discreta, o sea la maximización o minimización de una función objetivo bajo restricciones de diverso tipo: bajo ciertas condiciones se puede encontrar el máximo y el mínimo de una función derivable, incluso bajo restricciones (dadas por funciones también derivables) utilizando la derivabilidad (si el máximo o el mínimo no se encuentra en los extremos de un intervalo bajo análisis se ve dónde se anula la derivada, etc.). ¿Pero qué pasa si esas “ciertas condiciones” no se cumplen? La teoría de optimización lineal permite encontrar máximos y mínimos de funciones lineales bajo restricciones lineales, y esa teoría se puede aplicar, por ejemplo, cuando los conocimientos geográficos indican que en tales puntos de una cuenca fluvial se pueden instalar represas, sea para regular la navegación, para generar energía hidroeléctrica, para riego, por razones de turismo, etc. Ahora bien, cuando se construye una represa, sus dimensiones impactan aguas abajo, o sea no necesariamente una represa aguas abajo que, aisladamente, tiene dimensiones óptimas si no se piensa que habrá otra represa aguas arriba, las sigue teniendo con esa otra represa construida: si en una cuenca fluvial se planean varias represas, es necesario un análisis global para ver cuál es, globalmente el mejor diseño de cada una de ellas, y eso se puede resolver mediante optimización lineal, o linealizada (a veces una función no lineal se puede aproximar convenientemente por una lineal). Si además no está claro cuántas represas conviene construir (y la geografía es fundamental para indicar las eventuales ubicaciones), interviene acá otra rama de la matemática, la de optimización discreta o entera. Ese problema lo enfrentamos un grupo de profesionales, bajo mi dirección, en la década de 1980, y querría comentar que se me planteó un problema típico que no tiene una solución general, sino que hay que analizar cada caso en particular: nunca habíamos trabajado en la práctica con modelos de este tipo (yo los había estudiado en forma teórica en la facultad y luego por mi cuenta, pero una cosa es un modelo teórico y otra muy distinta un modelo concreto). Entonces la duda fue ¿qué hacer? ¿Comprar software (existen unos cuantos, por supuesto, algunos muy buenos) a un vendedor, sabiendo que su calidad está asegurada, pero pagando una suma no despreciable en dólares (como muchos de ustedes recordarán, no era muy distinta la situación económica argentina en esa época que ahora), o desarrollar software propio, con el riesgo de no cumplir a tiempo los compromisos asumidos contractualmente? Después de pensar mucho, y analizarlo cuidadosamente, decidí que, en ese caso particular, por diversas razones (que por supuesto no se pueden generalizar: hay otras situaciones en las que puede convenir comprar el software), convenía desarrollar software propio. Fue una patriada, y un riesgo, pero tuvimos éxito, y salimos adelante. Fue una valiosa experiencia respecto de que conviene manejarse con flexibilidad y no con consignas: a veces hay que "vivir con lo nuestro", como suele decirse, y a veces no.

La idea de escala es muy importante en geografía; en particular a ella se refiere un área de la matemática que tiene menos de cincuenta años de existencia: la geometría fractal, o teoría de fractales, fue creada por Benoît Mandelbrot en la década de 1970; con un enfoque matemático muy riguroso, la formulación de Mandelbrot usa herramientas matemáticas mucho más nuevas y poderosas (medida y dimensión de Hausdorff por ejemplo) que las usadas por Johnson en su libro; estas herramientas – aparte de crear el concepto de dimensión fraccionaria- permitieron aplicaciones en amplias ramas de la ciencia, e incluso en el arte: algunos objetos fractales son visualmente hermosísimos. El análisis fractal se puede usar para determinar con mucha más precisión la longitud real de una línea costera (de hecho, uno de los primeros trabajos de Mandelbrot al respecto, publicado en *Science* en 1967, se titula "Qué longitud tiene la costa de Gran Bretaña"), y se puede hablar perfectamente de una interrelación entre geografía y matemáticas con beneficio mutuo para ambas. En particular, la geometría fractal sirve para precisar las irregularidades de los sistemas geográficos. (Los conceptos fractales de Mandelbrot se pueden aplicar, entre muchas otras áreas, a las que tienen que ver con la naturaleza.) Como dicen Tannier y Pumain en un artículo de 2005 "la teoría de fractales se ha vuelto popular en geografía urbana. Su formalización es compatible con muchas características de sistemas urbanos: autosimilaridad en agrupamiento y fragmentación de patrones espaciales a diferente escala, organización jerárquica, sinuosidad de fronteras, y dinámica no lineal".

Ahora bien, estuve mencionando aplicación en geografía de técnicas de optimización, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, de fractales, de estadística. Todos estos avances en geografía matemática y muchos otros, como la posibilidad de efectuar simulaciones, diseñar modelos matemáticos cada vez más ambiciosos, y crear y estudiar sistemas muy complejos, han sido posibles gracias a la aparición y centralidad cada vez mayor de la computadora, a partir de la década de 1940, como ya mencionamos. Pero la computadora, además, a medida que fue creciendo en rapidez de cómputo, aumentando en capacidad de almacenamiento, expandiéndose geográficamente con la creación de redes, universalizándose con internet, etc., permitió que pudieran almacenarse y procesarse cantidades cuantiosas de datos geográficos. Las bases de datos son en este momento muy completas, e incitaron al desarrollo de técnicas para su tratamiento de la forma más exhaustiva posible, y dieron origen, como ya mencioné, a una nueva disciplina, la ciencia de datos. La obtención masiva de grandes cantidades de datos de distinto tipo provoca también la "maldición de la dimensionalidad", o sea el crecimiento exponencial de la memoria computacional necesaria para almacenar todos los datos a analizar, y para ello son importantes las técnicas de reducción de dimensionalidad.

Al respecto, en muchos campos la frontera entre la matemática y la ciencia de la computación, también ya mencionada, es muy borrosa, lo cual, por otra parte, es una muestra de un fenómeno más general, la cada vez mayor superposición de las ciencias, y la cada vez más difícil posibilidad de establecer límites claros entre ellas: sin ir más lejos, si se observan actualmente las personas que han obtenido en los últimos años los premios Nobel de Química, Física y Medicina, son cada vez más quienes originariamente obtuvieron su título en una disciplina distinta de aquélla en la cual obtuvieron el premio (sin ir más lejos, para dar ejemplos locales, Leloir, que era médico, obtuvo el premio Nobel de Química, y Milstein, que era químico, el de Medicina) por no hablar de los matemáticos que obtuvieron el premio Nobel de Economía, como Kantorovich. En algunos casos, la irrupción de la computadora permitió avances en disciplinas ya establecidas, pero además propició la aparición de ramas nuevas, como la inteligencia artificial, con impacto en la geografía. Mencionaré brevemente a algunas de ellas.

En un artículo de 2019 Hu y sus colegas hacen una descripción del uso de inteligencia artificial en geografía (GeoIA, en inglés). Usamos algunas definiciones de ellos, quienes definen inteligencia artificial como el estudio y diseño de máquinas o métodos computacionales que pueden realizar tareas que usualmente requieren inteligencia humana (esta definición es tal vez algo ambiciosa, pero publicitariamente es excelente; vale la pena recordar que ese enfoque puede remontarse al artículo de Alan Turing en *Mind* de 1950). Machine learning (aprendizaje automático) es una subrama de la inteligencia artificial basada en métodos estadísticos y optimización numérica, y aprendizaje profundo es una rama especial de aprendizaje automático de nivel de múltiples capas de "neuronas" (unidades de procesamiento no lineal) para aprender representaciones a partir de datos en bruto para lograr el aprendizaje automático para completar varias tareas de inteligencia artificial; cabe mencionar que las redes neuronales son otra subrama de la inteligencia artificial, que se pueden utilizar, por ejemplo, en regresión ponderada geográficamente. Hu y sus colegas indican varias aplicaciones de inteligencia artificial a la geografía: reconocimiento automático de rasgos naturales del terreno (cráteres, volcanes, dunas de arena) a partir de imágenes de teledetección; clasificación de tipos de terreno con propósitos conservacionistas, modelizado temporal y espacial de hábitat de hierbas marinas. Ejemplifican que Australia podría tener pérdidas en ese hábitat debido a las cambiantes condiciones del océano, y por el contrario la costa de Siberia podría mejorar la sustentabilidad de su hábitat. Algo similar hace Chesapeake Conservancy, una ONG con sede en Annapolis, Maryland, respecto de la zona de la bahía de Chesapeake, hábitat de más de 3600 especies animales y vegetales y de 17 millones de personas.

Los sistemas de información geográficos (GIS, por su sigla en inglés) son, por un lado, una herramienta geográfica de la mayor importancia, y por otro lado tienen obviamente una carga matemática considerable: un GIS almacena, analiza y procesa datos (cuya magnitud hubiera hecho imposible su creación antes de la aparición de las computadoras digitales, aunque hay interesantes ejemplos de GIS "a mano" o, si queremos ser más precisos, análisis espacial a mano, como el mapa de 1832 del geógrafo francés Charles Picquet que informa la densidad de muertos a causa de la epidemia de cólera). Y requiere –aparte, por supuesto, de temas tradicionales, el uso de curvas de Bézier, de funciones spline, de temas de geometría computacional, tales como polígonos de Thiessen (o sea diagramas de Voronoi) y triangulaciones de Delauney, y de estadística, como ajuste, a veces bastante sofisticado, con origen en mínimos cuadrados. Es interesante, respecto de la relación entre la matemática y la geografía, que hace poco (2016) profesores de geografía brasileños (Sandro y João Bosco Laudares y Matheus Pereira Libório) han planteado la sugerencia de usar GIS como un método practico de enseñar matemáticas: su enfoque es que se puede "mezclar" ambas disciplinas para enseñar a alumnos universitarios integrando geografía con estadística y ciencias de la computación, como herramienta educativa de alumnos universitarios. En particular, la inteligencia artificial está muy presente en GIS, a través de distintas áreas y subáreas del conocimiento, ya mencionadas: aprendizaje automático, aprendizaje profundo, redes neuronales (para dar uno de los múltiples ejemplos, en regresión ponderada geográficamente), sistemas expertos. Las grandes bases de datos que se han ido acumulando a medida que la capacidad de almacenamiento y de procesamiento de las computadoras aumentó en forma vertiginosa también contribuyen a la expansión de este enfoque. GIS obtiene, almacena, administra y analiza datos. Muchos datos.

Otra área importante de inteligencia artificial es la de los sistemas expertos. En diseño de mapas, determinación de rasgos del terreno, manejo de bases de datos geográficas, apoyo a decisiones geográficas, los sistemas expertos permiten tomar decisiones según distintos criterios, algunos de los cuales son cualitativos y otros cuantitativos, y puede haber diferentes pesos asignados (subjetivamente) a los criterios, a menudo bajo incertidumbre, lo cual implica, naturalmente, la participación de la estadística.

En este momento las imágenes digitales, en particular, pero no exclusivamente, las satelitales (y no hace falta mencionar la utilidad no sólo para el geógrafo sino para la gente común de sistemas como Google Earth), son una herramienta esencial de la geografía. La carga matemática detrás de una imagen digital es inmensa, y en muchos casos de matemática desarrollada en las últimas décadas: procesamiento de señales (en dominio temporal y dominio de frecuencia, con una teoría que va desde series y transformadas de Fourier hasta uso de wavelets (ondículas) reducción de ruido existente en la imagen, mejora de calidad de la imagen, métodos estadísticos, métodos de filtrado y clasificación de imágenes, etc. El procesamiento de imágenes (y su correspondiente filtro) puede ser lineal o no lineal. Aparecen los núcleos de convolución; se pueden descomponer y reconstituir las imágenes, aparecen técnicas de inversión, incluso cada vez más algoritmos de aprendizaje automático, formalismos bayesianos,

El procesamiento digital de imágenes incluye codificación de imágenes, restauración de imágenes, procesamiento de imágenes tridimensionales, preprocesamiento de imágenes, reconstrucción de estereoimágenes, codificación y decodificación de imágenes, compresión de imágenes, y algoritmos de estadística, como el algoritmo muestral de Kantorovich, etc. Inútil es repetir la carga matemática de todas esas áreas.

En particular, la compresión de imágenes tiene actualmente gran importancia en geografía. Por ejemplo, es común usar la técnica de JPEG (Joint Photographic Experts Group) de compresión de imágenes, especialmente si las imágenes fueron obtenidas por fotografía digital. En principio, se pueden hacer compresiones de 10 a 1 (o sea, un orden de magnitud) sin perder significativamente precisión. JPEG (y otras más) usan la transformada discreta del coseno, propuesta por Nasir Ahmed en 1972, y que es la más usada técnica de compresión de datos hasta el momento.[1]

Una herramienta importante para "conectar" figuras (en nuestro caso geométricas) de diferencia abrupta, o dadas por puntos, es una curva suavizadora. Hay varias de ellas, que se pueden usar en geografía: los splines permiten "pegar" curvas con un determinado grado de derivabilidad perdiendo apenas un grado de derivabilidad; las ya mencionadas curvas de Bézier, inventadas en la década de 1960 por el ingeniero francés Bézier (curiosamente, en el diseño de automóviles de Renault) sirven también este propósito. Existen curvas de Bézier cuadráticas, cúbicas, etc., así como existen splines de diverso tipo.

Para planificación urbana y regional se usan modelos matemáticos de simulación desde hace bastante tiempo. En particular, en geografía urbana, es digno de tenerse en cuenta el modelo de Lowry de 1964, enfocado en la ciudad de Pittsburgh, y los modelos que éste modelo impulsó. El modelo de Lowry consta de varias variables (entre ellas, como las más importantes, el área de una zona, el empleo, la población, el costo de transporte) y una serie de relaciones entre todas las variables, muy claramente especificadas, que lo convierten, como dice Wilson en su libro de 2012 sobre la ciencia de las ciudades y las regiones, en fundamental para poder analizar –y eventualmente predecir- dichas relaciones. Como dice Lowry en el comienzo de su documento, "este informe describe un modelo computacional de la organización espacial de las actividades humanas en un área metropolitana". Poco después, en su libro de 1973, Benjamín Reif indica ecuaciones (aproximadas) análogas a las de la ley de gravitación de Newton del tipo "el número de viajes entre concentraciones de población es proporcional al producto de la población de los dos centros e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos", modelos de estructuras espaciales urbanas, modelos probabilísticos de crecimiento residencial, modelos de crecimiento regional (como el de Penn-Jersey, que, si bien luego fue abandonado, reemplazado por otros más precisos, usa técnicas de programación lineal). Y también puede mencionarse el libro de Jay Forrester de 1969 sobre dinámica urbana, surgido después de discusiones con un ex intendente de Boston, en el cual usa la metodología que muy pocos años

[1] Ahmed et al. (1974).

después se convertiría en mundialmente famosa con el libro de Meadows y sus colaboradores[1] sobre los límites del crecimiento, que a su vez provocó incluso una respuesta desde nuestro país con un modelo mundial preparado por Herrera, Scolnik y colaboradores en la Fundación Bariloche. [2]

Omito, porque si no esta exposición puede prolongarse demasiado, el uso de teledetección en geografía, con su carga matemática de tratamiento de señales, reconocimiento de patrones por métodos estadísticos, entrenamiento de clasificadores, resolución de problemas de inversión y uso de wavelets para analizar fronteras (del tipo que sean), por no hablar de áreas fascinantes como paleogeografía y geografía espacial. Querría ahora, antes de terminar, comentar tres experiencias personales al comienzo de mi trabajo como matemático aplicado profesional; dos de ellas están directamente ligadas a la geografía, y la tercera en forma más indirecta, pero igual muy ilustrativa.

La primera de ellas (todas tuvieron lugar a principios de la década de 1970) fue mi primer relación con un modelo hidrodinámico bidimensional, es decir, un modelo matemático del flujo del agua en un río ancho, o bahía, o golfo, o incluso mar abierto, que representa la altura del agua en la superficie (respecto de algún plano de referencia) y las velocidades en las dos dimensiones superficiales (también puede haber modelos bidimensionales que toman en cuenta la dirección longitudinal -en el sentido de la corriente- de la velocidad y su valor a distintas profundidades, pero no era el caso).

Queríamos modelizar el Río de la Plata (que, por razones obvias, no puede ser modelizado unidimensionalmente) y habíamos adquirido un programa computacional de una consultora norteamericana, muy bien documentado y con perfectas y adecuadas instrucciones, y preparado para modelizar inmediatamente una bahía japonesa. Sin embargo, naturalmente que yo quería probarlo primero, y la prueba que yo quería hacer era, por supuesto, distinta de dicha bahía, es decir, quería aplicar el modelo a *otro* caso. Entonces se me ocurrió lo siguiente: yo tenía un modelo hidrodinámico unidimensional (la dimensión era la longitudinal) que funcionaba perfectamente bien. Entonces simulé un modelo de tramo unidimensional muy simple (sin curvas ni cambios de ancho del cauce) con una corrida unidimensional con datos cuyos resultados fueran perfectamente razonables, como lo fueron. Luego convertí ese modelo en bidimensional, dividiendo el ancho (constante) del tramo en cuestión en franjas paralelas (era un modelo en diferencias finitas) con todos los datos iguales en cada franja (y los datos transversales consistentes), con lo cual, si el modelo bidimensional funcionaba bien, los resultados debían ser iguales en cada franja al resultado unidimensional. Y no fue así. Se producía una deflexión, que yo no entendía a qué se podía deber. Después de varias horas de investigación de los resultados me di cuenta: el modelo bidimensional tenía las instrucciones para esa bahía japonesa, y por consiguiente el valor dado del coeficiente de Coriolis era el que correspondía a esa latitud, mientras que para que mi modelo funcionara debía ponerle coeficiente de Coriolis nulo, como si fuera en el Ecuador. Así lo hice, y aprendí dos cosas: que uno tiene que tener muy en cuenta todos los valores geográficos, y que el modelo en realidad tenía un error elemental de programación:

[1] Meadows et al. (1972).

[2] Herrera et al. (1976).

entre las instrucciones de código figuraba un valor constante que en realidad tenía que figurar como dato.

La segunda experiencia fue que corrí por computadora un modelo del río Paraná que yo estaba seguro de que debía funcionar bien, y en cambio se desestabilizaba rápidamente. De nuevo, tuve que hacer un análisis muy cuidadoso hasta darme cuenta de que, por error, había usado dos ceros distintos para un plano de referencia general: unos datos me venían con el cero MOP, el cero del entonces Ministerio de Obras Públicas, y el otro con el cero IGM, el cero del entonces Instituto Geográfico Militar, actualmente Instituto Geográfico Nacional; ambos ceros difieren en 0,5558 metros, y como yo no tenía un geógrafo que me asesorara, no había prestado atención a ese detalle. Una vez unificados los ceros, todo anduvo sobre ruedas.

El tercer recuerdo de esa época relacionado con fracasos extraños de mis modelos fue otra inestabilidad de un modelo, que también tuve que analizar con mucho cuidado hasta descubrir el problema, problema típico (y en este caso hasta gracioso) de un país no tan desarrollado como aspiramos a que el nuestro lo sea: los datos que usaba como condiciones de contorno provenían de determinados hidrómetros. Hete aquí que esos datos no eran grabados automáticamente, sino que eran anotados por el encargado del hidrómetro. Y en algunas oportunidades (en particular después de las fiestas de fin de año, tal vez aún bajo los efectos de una borrachera) dicho encargado anotaba correctamente los valores en centímetros (es decir, los valores después de la coma decimal) y se equivocaba en el valor a la izquierda de la coma decimal, el que debía indicar el metro. Naturalmente, con datos grabados automáticamente este error no podría producirse. Lo cual es una muestra, entre las muchas que hay, de que aparte de los conocimientos académicos uno tiene que tener un poco de lo que vulgarmente se dice “calle”. (Conste que lo grave era una borrachera leve, con la cual el operador anotaba mal el dato hidrométrico: con una borrachera profunda, como a veces pasaba, directamente no anotaba el dato, y uno sabía a qué atenerse.)

Antes de terminar, querría aprovechar la oportunidad para mencionar en esta ocasión al ingeniero Mario Horacio Gradowczyk, doctor en ciencias técnicas por la universidad de Graz, en Austria. Gradowcyk no sólo fue primero mi jefe y luego mi socio, sino que fue mi maestro: todo lo que hice científica y tecnológicamente en hidráulica fluvial e hidrodinámica fue gracias a la formación tanto teórica como práctica que tuve junto a él. Creo que Gradowczyk fue uno de los grandes ingenieros –y hubo unos cuantos, por suerte- que produjo nuestro país, y me queda la deprimente sensación de que el país lo aprovechó mucho menos de lo que habría podido. No es, desgraciadamente, el único caso de talento desaprovechado en Argentina.

Les agradezco la atención prestada, y nuevamente les comento el honor que significa para mí integrar esta Academia. Muchas gracias.

REFERENCIAS

Ahmed, N.; Natarajan, T. y Rao, K.R. (1974). Discrete Cosine Transform. *IEEE Transactions on Computers* 23: 90-93.

Ashton, Winifred D. (1966). *The theory of road traffic flow*. Londres: Methuen & Co.
Erathostenes (2010). *Geography. Fragments collected and translated, with commentary and additional material, by Duane W. Roller*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Forrester, Jay W. (1969). *Urban dynamics*, Boston: MIT Press.

Freile, Luis (1954). The need of mathematics in geography. *Proceedings of the Oklahoma Academy of Sciences*, 158-160.

Giagnoni, Cristóbal y White, Guillermo (1884). Prolongación del ferrocarril central-norte. Metán-Salta-Jujuy. Informe general. *Anales de la Sociedad Científica Argentina* 18 (4): 145-192.

Heine III, George W. (2004). The prehistory of conformal mapping. Development of mathematical cartography in the eighteenth century. *24th Annual ESRI User Conference Proceedings*, Environmental Systems Research Institute, August 9-13, 2004.
https://proceedings.esri.com/library/userconf/proc04/docs/pap1048.pdf

Herrera, Amílcar; Scolnik, Hugo; Chichilnisky, Graciela; Gallopin, Gilberto; Hardoy, Jorge; Mosovich, Diana; Oteiza, Enrique; Romero Brest, Gilda L. de; Suárez, Carlos y Talavera, Luis (1976). *Catastrophe or new society?*. Ottawa: International Development Research Center.

Hoffmann, José A. J. (ed.) (1975). *Atlas climático de la América del Sur*. Ginebra: Organización Meteorológica Mundial.

Hu, Yingjie; Li, Wenwen; Wright, Dawn; Aydin, Orhun; Wilson, Daniel; Maher, Omar; y Raad, Mansour (2019). Artificial Intelligence Approaches. En John P. Wilson (ed.), *The Geographic Information Science & Technology Body of Knowledge* (3rd Quarter 2019 Edition). https://doi.org/10.22224/gistbok/2019.3.4

Jacovkis, Pablo M. (2017). La complejidad del transporte ferroviario en Argentina. Desafíos de una política pública de recuperación y expansión. En *Actas II Congreso Argentino de Transporte*, Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo, 103-110.
https://rutarg.com.ar/?page_id=1133

Jacovkis, Pablo M. (2018). La red ferroviaria argentina: comparaciones internacionales y política pública de desarrollo. *INNOVA UNTREF - Revista Argentina de Ciencia y Tecnología* **2**. <http://www.untref.edu.ar/innova/opinion.php>.

Johnson, Willis E. (1907). *Mathematical geography*. Nueva York: American Book Company.

King, Cuchlaine A. M. (1970). Mathematics in geography. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **1** (2): 185-205.
Laudares, Sandro; Laudares, João Bosco y Libório, Matheus P. (2016). Geographic Information Systems used as a practical way of teaching mathematics. *Journal of Geographic Information Systems* **8**: 608-617.

Lighthill, Michael J. y Whitham, Gerard B. (1955). On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society A* **229**: 317-345.
Lowry, Ira S. (1964). *A Model of Metropolis.* Santa Monica, CA: RAND Memorandum 4025-RC.

Mandelbrot, Benoît (1967). How long is the coast of Britain. *Science* **156**: 636-638.
Meadows, Donella H.; Meadows, Dennis L.; Randers, Jorgen y Behrens III, William W. (1972). *The limits to growth*. Nueva York: Universe Books.

Oliveira, Leonardo C. de y Ferreira, Luiz F. (2002). A new approach for the computation of the arc-of-meridian, *The Australian Surveyor* **47** (1).

Ortiz, Eduardo L. (2005). La Comisión del arco de meridiano. Astronomía, geodesia, oceanografía y geofísica en la Argentina de 1935-1945. *Saber y Tiempo* **19**: 127-187.

Penchaszadeh, Pablo E. (ed.) (2012). *El Museo Argentino de Ciencias Naturales. 200 años*. Buenos Aires: MINCyT-MACN-CONICET.

Reif, Benjamin (1973). *Models in urban and regional planning*. Londres: Leonard Hill Books.

Rickey, V. Frederick y Tuchinsky, Philip M. (1980). An application of geography to mathematics: history of the integral of the secant. *Mathematics Magazine* **53** (3): 162-166.

Smith, Jim R. (2002). The Meridian Arc Measurement in Peru 1735 – 1745. *FIG (Fédération Internationale de Géomètres) XXII International Congress*, Washington D.C. April 19-26, 2002.

Sobel, Dava (1996), *Longitude.* Londres: Fourth Estate Limited.

Sociedad Científica Argentina (1972). *Evolución de las ciencias en la República Argentina: Meteorología, oceanografía y radiopropagación (1923-1972)*. Volumen 5 de *Evolución de las ciencias en la República Argentina (1923-1972*). Buenos Aires: Sociedad Científica Argentina.

Tannier, Cécile y Pumain, Denise (2005). Fractals in urban geography: a theoretical outline and an empirical example. *Cybergeo: European Journal of Geography*.
http://journals.openedition.org/cybergeo/3275

Turing, Alan M. (1950). Computing Machinery and Intelligence. *Mind* **49**: 433-460.
Wilson, Alan (2012). *The science of cities and regions*. Dordrecht: Springer.

Académicos asistentes a la reunión