En ocasión de su admisión a la Academia Nacional de Geografía *como académico titular, en 2022, el profesor Pablo Jacovkis ofreció una disertación sobre la interrelación entre ambas disciplinas.* Ciencia Hoy *decidió publicarlas en cuatro partes de lectura independiente.*

Pablo Miguel Jacovkis
UNTREF

Matemática y geografía: una historia compartida

Parte 4: la geografía inspira a la matemática

Otra rama de la matemática utilizada actualmente en geografía es la optimización lineal, no lineal y discreta, o sea la maximización o minimización de una función objetivo bajo restricciones de diverso tipo: bajo ciertas condiciones se puede encontrar el máximo y el mínimo de una función suficientemente derivable, incluso bajo restricciones (dadas por funciones también derivables) utilizando la derivabilidad (si el máximo o el mínimo no se encuentra en los extremos de un intervalo bajo análisis se ve dónde se anula la derivada, etcétera). ¿Pero qué pasa si esas 'ciertas condiciones' no se cumplen? La teoría de optimización lineal permite encontrar máximos y mínimos de funciones lineales bajo restricciones lineales, y esa teoría se puede aplicar, por ejemplo, cuando los conocimientos geográficos indican que en tales puntos de una cuenca fluvial se pueden instalar represas,

¿DE QUÉ SE TRATA?

La relación histórica y actual entre las matemáticas y la geografía.

sea para regular la navegación, para generar energía hidroeléctrica, para riego, por razones de turismo, etcétera. Ahora bien, cuando se construye una represa, sus dimensiones impactan aguas abajo, o sea, no necesariamente una represa aguas abajo que, aisladamente, tiene dimensiones óptimas si no se piensa que habrá otra represa aguas arriba, las sigue teniendo con esa otra represa construida: si en una cuenca fluvial se planean varias represas, es necesario un análisis global para ver cuál es, globalmente, el mejor diseño de cada una de ellas, y eso se puede resolver mediante optimización lineal, o linealizada (a veces una función no lineal se puede aproximar convenientemente por una lineal). Si además no está claro cuántas represas conviene construir (y la geografía es fundamental para indicar las eventuales ubicaciones), interviene acá otra rama de la matemática, la de optimización discreta o entera. Ese problema lo enfrentamos un grupo de profesionales en la década de 1980, y querría comentar que se me planteó un problema típico que no tiene una solución general, sino que hay que analizar cada caso en particular: nunca habíamos trabajado en la práctica con modelos de este tipo (yo los había estudiado en forma teórica en la facultad y luego por mi cuenta, pero una cosa es un modelo teórico y otra muy distinta un modelo concreto). Entonces la duda fue ¿qué hacer? ¿Comprar *software* (existen unos cuantos, por supuesto, algunos muy buenos) a un vendedor, sabiendo que su calidad está asegurada, pero pagando una suma no despreciable en dólares (no era muy distinta la situación económica argentina en esa época que ahora), o desarrollar *software* propio, con el riesgo de no cumplir a tiempo los compromisos asumidos contractualmente? Después de pensar mucho, y analizarlo cuidadosamente, decidí que, en ese caso particular, por diversas razones (que por supuesto no se pueden generalizar: hay otras situaciones en las que puede convenir comprar el *software*), convenía desarrollar *software* propio. Fue una patriada, y un riesgo, pero tuvimos éxito, y salimos adelante. Fue una valiosa experiencia respecto de que conviene manejarse con flexibilidad y no con consignas: a veces hay que 'vivir con lo nuestro', como suele decirse, y a veces no.

La idea de escala es muy importante en geografía; en particular a ella se refiere un área de la matemática que tiene menos de cincuenta años de existencia: la geometría fractal, o teoría de fractales, creada por Benoît Mandelbrot en la década de 1970; con un enfoque matemático muy riguroso, la formulación de Mandelbrot usa herramientas matemáticas mucho más nuevas y poderosas (medida y dimensión de Hausdorff, por ejemplo) que las usadas por Johnson en su libro; estas herramientas –aparte de crear el concepto de dimensión fraccionaria– permitieron aplicaciones en amplias ramas de la ciencia, e incluso en el arte: algunos objetos fractales son visualmente hermosísimos. El análisis fractal se puede usar para determinar con mucha más precisión la longitud real de una línea costera (de hecho, uno de los primeros trabajos de Mandelbrot al respecto, publicado en *Science* en 1967, se titula 'Qué longitud tiene la costa de Gran Bretaña'), y se puede hablar perfectamente de una interrelación entre geografía y matemáticas con beneficio mutuo para ambas. En particular, la geometría fractal sirve para precisar las irregularidades de los sistemas geográficos. (Los conceptos fractales de Mandelbrot se pueden aplicar, entre muchas otras áreas, a las que tienen que ver con la naturaleza.) Como dicen Tannier y Pumain en un artículo de 2005: 'La teoría de fractales se ha vuelto popular en geografía urbana. Su formalización es compatible con muchas características de sistemas urbanos: autosimilaridad en agrupamiento y fragmentación de patrones espaciales a diferente escala, organización jerárquica, sinuosidad de fronteras y dinámica no lineal'.

Ahora bien, estuve mencionando la aplicación en geografía de técnicas de optimización, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, de fractales, de estadística. Todos estos avances en geografía matemática y muchos otros, como la posibilidad de efectuar simulaciones, diseñar modelos matemáticos cada vez más ambiciosos, y crear y estudiar sistemas muy complejos, han sido posibles gracias a la aparición y centralidad cada vez mayor de la computadora, a partir de la década de 1940, como ya mencionamos. Pero la computadora, además, a medida que fue creciendo en rapidez de cómputo, aumentando en capacidad de almacenamiento, expandiéndose geográficamente con la creación de redes, universalizándose con internet, etcétera, permitió que pudieran almacenarse y procesarse cantidades cuantiosas de datos geográficos. Las bases de datos son en este momento muy completas, e incitaron al desarrollo de técnicas para su tratamiento de la forma más exhaustiva posible, y dieron origen, como ya señalé, a una nueva disciplina, la ciencia de datos. La obtención masiva de grandes cantidades de datos de distinto tipo provoca también la 'maldición de la dimensionalidad', o sea, el crecimiento exponencial de la memoria computacional necesaria para almacenar todos los datos a analizar, y para ello son importantes las técnicas de reducción de dimensionalidad.

En algunos casos, la irrupción de la computadora permitió avances en disciplinas ya establecidas, pero además propició la aparición de ramas nuevas, como la inteligencia artificial, con impacto en la geografía. Mencionaré brevemente algunas de ellas.

En un artículo de 2019 Hu y sus colegas hacen una descripción del uso de inteligencia artificial en geografía (GeoAI, en inglés). Usamos algunas definiciones de ellos, quienes definen inteligencia artificial como el estudio y diseño de máquinas o métodos computacionales que pueden realizar tareas que usualmente requieren inteligencia humana (ese enfoque puede remontarse al artículo de Alan Turing en *Mind* de 1950). Hu y sus colegas indican varias aplicaciones de inteligencia artificial a la geografía: reconocimiento automático de rasgos naturales del terreno (cráteres, volcanes, dunas de arena) a partir de imágenes de teledetección; clasificación de tipos de terreno con propósitos conservacionistas, modelizado temporal y espacial de hábitat de hierbas marinas. Ejemplifican que Australia podría tener pérdidas en ese hábitat debido a las cambiantes condiciones del océano, y por el contrario la costa de Siberia podría mejorar la sustentabilidad de su hábitat. Algo similar hace Chesapeake Conservancy, una ONG con sede en Annapolis, Maryland, respecto de la zona de la bahía de Chesapeake, hábitat de más de 3600 especies animales y vegetales y de 17 millones de personas.

Los sistemas de información geográficos (GIS, por su sigla en inglés) son, por un lado, una herramienta geográfica de la mayor importancia, y por otro lado tienen obviamente una carga matemática considerable: un GIS almacena, analiza y procesa datos (cuya magnitud hubiera hecho imposible su creación antes de la aparición de las computadoras digitales, aunque hay interesantes ejemplos de GIS 'a mano' o, si queremos ser más precisos, análisis espacial a mano, como el mapa usado en el informe de 1834 que indica la densidad de muertos a causa de la epidemia de cólera de 1832 en París). Y requiere –aparte, por supuesto, de temas tradicionales– el uso de curvas de Bézier, de funciones *spline*, de temas de geometría computacional, tales como polígonos de Thiessen (o sea, diagramas de Voronoi) y triangulaciones de Delauney, y de estadística, como ajuste, a veces bastante sofisticado, con origen en mínimos cuadrados. Es interesante, respecto de la relación entre la matemática y la geografía, que hace poco (2016) profesores de geografía brasileños (Sandro y João Bosco Laudares y Matheus Pereira Libório) han planteado la sugerencia de usar GIS como un método práctico de enseñar matemáticas: su enfoque es que se puede 'mezclar' ambas disciplinas para enseñar a alumnos universitarios, integrando geografía con estadística y ciencias de la computación. En particular, la inteligencia artificial está muy presente en GIS, a través de distintas áreas y subáreas del conocimiento: aprendizaje automático, aprendizaje profundo, redes neuronales, sistemas expertos. Las grandes bases de datos que se han ido acumulando a medida que la capacidad de almacenamiento y de procesamiento de las computadoras aumentó en forma vertiginosa también contribuyen a la expansión de este enfoque. GIS obtiene, almacena, administra y analiza datos. Muchos datos.

Otra área importante de inteligencia artificial es la de los sistemas expertos. En diseño de mapas, determinación de rasgos del terreno, manejo de bases de datos geográficas, apoyo a decisiones geográficas, los sistemas expertos permiten tomar decisiones según distintos criterios, algunos de los cuales son cualitativos y otros cuantitativos, y puede haber diferentes pesos asignados (subjetivamente) a los criterios, a menudo bajo incertidumbre, lo cual implica, naturalmente, la participación de la estadística.

En este momento las imágenes digitales, en particular pero no exclusivamente las satelitales (y no hace falta mencionar la utilidad no solo para el geógrafo sino para la gente común de sistemas como Google Earth), son una herramienta esencial de la geografía. La carga matemática detrás de una imagen digital es inmensa, y en muchos casos de matemática desarrollada en las últimas décadas: procesamiento de señales (en dominio temporal y dominio de frecuencia, con una teoría que va desde series y transformadas de Fourier hasta uso de *wavelets* (ondículas), reducción de ruido existente en la imagen, mejora de calidad de la imagen, métodos estadísticos, métodos de filtrado y clasificación de imágenes, etcétera. El procesamiento digital de imágenes incluye codificación de imágenes, restauración de imágenes, procesamiento de imágenes tridimensionales, preprocesamiento de imágenes, reconstrucción de estereoimágenes, codificación y decodificación de imágenes, compresión de imágenes y algoritmos de estadística. Inútil es repetir la carga matemática de todas esas áreas.

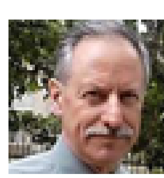
En particular, la compresión de imágenes tiene actualmente gran importancia en geografía. Por ejemplo, es común usar la técnica de JPEG (*Joint Photographic Experts Group*) de compresión de imágenes, especialmente si las imágenes fueron obtenidas por fotografía digital. En principio, se pueden hacer compresiones de 10 a 1 (o sea, un orden de magnitud) sin perder significativamente precisión. JPEG (y otras más) usan la transformada discreta del coseno, propuesta por Nasir Ahmed en 1972, y que es la más usada técnica de compresión de datos hasta el momento.

Una herramienta importante para 'conectar' figuras (en nuestro caso geométricas) de diferencia abrupta, o dadas por puntos, es una curva suavizadora. Hay varias de ellas que se pueden usar en geografía: los *splines* permiten 'pegar' curvas con un determinado grado de derivabilidad perdiendo apenas un grado de derivabilidad; las curvas de Bézier, inventadas en la década de 1960 por el ingeniero francés Pierre Bézier (curiosamente, en el diseño de automóviles de Renault), sirven también a este propósito. Existen curvas de Bézier cuadráticas, cúbicas, etcétera, así como existen *splines* de diverso tipo.

Para planificación urbana y regional se usan modelos matemáticos de simulación desde hace bastante tiempo. En particular, en geografía urbana, es digno de tenerse en cuenta el modelo de Lowry de 1964, enfocado en la ciudad de Pittsburgh, y los modelos que este modelo impulsó. El modelo de Lowry consta de diversas variables (entre ellas, como las más importantes, el área de una zona, el empleo, la población, el costo de transporte) y una serie de relaciones entre todas las variables, muy claramente especificadas, que lo convierten, como dice Wilson en su libro de 2012 sobre la ciencia de las ciudades y las regiones, en fundamental para poder analizar –y eventualmente predecir– dichas relaciones. Como menciona Lowry en el comienzo de su documento, 'este informe describe un modelo computacional de la organización espacial de las actividades humanas en un área metropolitana'. Poco después, en su libro de 1973, Benjamin Reif indica ecuaciones (aproximadas) análogas a las de la ley de gravitación de Newton del tipo 'el número de viajes entre concentraciones de población es proporcional al producto de la población de los dos centros e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos', modelos de estructuras espaciales urbanas, modelos probabilísticos de crecimiento residencial, modelos de crecimiento regional (como el de Penn-Jersey que, si bien luego fue abandonado, reemplazado por otros más precisos, usa técnicas de programación lineal). El modelo de Lowry también influyó en el libro compilado por Marcial Echenique –bastante pionero, por cierto, en América Latina– sobre modelos matemáticos de la estructura espacial urbana, que incluye valiosas aplicaciones en esta región: se describen diversos modelos matemáticos de geografía urbana de Buenos Aires, Santiago de Chile y Caracas. Y también puede mencionarse el libro de Jay Forrester de 1969 sobre dinámica urbana, surgido después de discusiones con un exintendente de Boston, en el cual usa la metodología que muy pocos años después se convertiría en mundialmente famosa con el libro de Meadows y sus colaboradores sobre los límites del crecimiento, que a su vez provocó incluso una respuesta desde nuestro país con un modelo mundial preparado por Herrera, Scolnik y colaboradores en la Fundación Bariloche.

La lista de interacciones puede seguir durante bastantes páginas, pero se volvería un tanto monótona. Mi intención era solamente recordar una relación entre geografía y matemáticas que sigue siendo tan estrecha (y tan útil) como lo fue en los albores de la civilización. Para ambas disciplinas.

En memoria del ingeniero Mario Horacio Gradowczyk.



Pablo Miguel Jacovkis

Doctor en matemáticas, UBA.
Profesor emérito, UBA.
Secretario de Investigación y Desarrollo de la Universidad Nacional de Tres de Febrero (UNTREF).
pablo.jacovkis@gmail.com