En ocasión de su admisión a la Academia Nacional de Geografía como académico titular, en 2022, el profesor Pablo Jacovkis ofreció una disertación sobre la interrelación entre ambas disciplinas. CIENCIA HOY *decidió publicarlas en cuatro partes de lectura independiente. Esta es la segunda.*

Pablo Miguel Jacovkis
UNTREF

Matemática y geografía: una historia compartida

Parte 2: la geografía inspira a la matemática

Dado que, como supuso Isaac Newton, la Tierra no es una esfera exacta, sino que está achatada en los polos (para predecir lo cual la contribución de las herramientas matemáticas y la teoría física planteadas por el mismo Newton fue crucial), para el cálculo del arco de meridiano (y del radio de curvatura del meridiano) la matemática usada no es tan simple como lo sería si la Tierra fuera una esfera, e intervienen aproximaciones, integrales elípticas, etcétera. Ya la geometría se pone compleja y pide ayuda al cálculo integral. La matemática dura y pura es indispensable para estos cálculos, y aparecen series numéricas, integración numérica… y permanentemente nuevos métodos son propuestos, para los cuales también es necesario el empleo de técnicas de análisis numérico, puesto que no siempre (o, mejor dicho, pocas veces) las fórmulas empleadas permiten el cálculo directo. Al respecto, uno de los más ambiciosos proyectos científicos y tecnológicos encarados en nuestro país fue la medición de un arco de meridiano, tarea a cargo de una Comisión del Arco, y que fue aprobada en 1936 por ley del Congreso; durante la primera parte del trabajo de dicha Comisión (concretamente, hasta 1941, en que retornó a España) fue fundamental la colaboración con ella del distinguido matemático español Esteban Terradas, residente en la Argentina desde 1936 con motivo de la guerra civil española, como detalla Eduardo Ortiz en su enjundioso artículo sobre la medición del arco de meridiano en la Argentina (‘La Comisión del Arco de meridiano: astronomía, geodesia, oceanografía y

¿DE QUÉ SE TRATA?

La relación histórica y actual entre las matemáticas y la geografía.

geofísica en la Argentina de 1935-1945', *Saber y Tiempo*, 19: 127-187). Es decir, en algún sentido nosotros también tuvimos muy tempranamente un proyecto de lo que hoy se llamaría *big science*.

Es interesante observar que, pese a que la medición del meridiano se puede llevar a cabo mediante la aplicación de fórmulas matemáticas sólidas y muy fundamentadas, se sigue pudiendo proponer fórmulas alternativas interesantes, variando ligeramente los enfoques, lo cual es un ejemplo de la riqueza de las investigaciones en temas que, a primera vista, uno podría suponer ya completamente estudiados (naturalmente, esto no significa que nuevas fórmulas sean necesariamente mejores, pero sí que incentivan, a partir de problemas de la geografía, a veces más simples, a veces más complejos, la resolución de problemas matemáticos). Un caso que pongo como ejemplo es el del trabajo de 2002 de los profesores brasileños Leonardo Oliveira y Luiz Ferreira con un nuevo enfoque para la determinación del arco de meridiano ('A new approach for the computation of the arc-of-meridian', *The Australian Surveyor*, 47 (1): 8-13).

De paso, un importante problema geográfico, crucial para la navegación, la determinación de la longitud, si bien fue solucionado por el talentoso relojero John Harrison, como relata por ejemplo el atractivo libro *Longitude* (Londres, Fourth Estate Limited), de Dava Sobel (un ejemplo de la geografía incitando a la mejora de la construcción de relojes mecánicos), promovió, antes de la solución de Harrison, que mentes brillantes de la ciencia estudiaran el problema, usaran ampliamente la matemática (y la astronomía) y permitieran la solución de varios problemas científicos no triviales, entre ellos el primer cálculo de la velocidad de la luz. O sea, el impacto de la geografía sobre las matemáticas –y sobre muchas otras disciplinas– es considerable. La relación fue siempre de ida y vuelta: no es que las otras ciencias 'permitieron' el desarrollo de la geografía: también la geografía 'permitió' el desarrollo de las otras ciencias (y de la tecnología, como indica por ejemplo la historia de la determinación de la longitud), y entre ellas de la matemática.

Pasemos ahora por un momento a analizar cómo fue la geografía la catalizadora, en el siglo XVIII, de una de las ramas más importantes y productivas de la matemática actual, la teoría de grafos: la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental (actualmente Kaliningrado, en Rusia), famosa por ser la ciudad natal del gran filósofo Immanuel Kant y la ciudad donde se crio y estudió el gran matemático David Hilbert, está atravesada por el río Pregel e incluye dos islas, comunicadas entre sí y con el resto de la ciudad mediante siete puentes. El gran matemático Leonhard Euler se planteó el problema de una caminata que pasara una vez sola por cada uno de los puentes y visitara toda la ciudad, y demostró que eso es imposible, con lo cual dio comienzo la actual teoría de grafos, rama muy importante de la combinatoria.

También la geografía política 'inspiró' a la matemática (y también este ejemplo es de teoría de grafos): si se tiene un mapa con distintas regiones, o de distintos países arbitrarios, o de distintos estados o provincias de un país, todos dentro de una misma 'masa continental', la pregunta que se plantea es la siguiente: '¿Es posible pintar un mapa, con solo cuatro colores, en el que dos regiones adyacentes nunca tengan el mismo color?'. Si bien se sospechaba que esa pregunta tiene una respuesta afirmativa (que cinco colores bastan lo probó Percy John Heawood en 1890; numerosos contraejemplos muestran que con tres no se puede) la primera demostración matemática de que efectivamente es posible con cuatro colores fue llevada a cabo por Kenneth Appel y Wolfgang Hakel en 1976 mediante un enfoque para muchos sorprendente: lograron reducir el problema –mediante procedimientos matemáticos 'tradicionales'– al análisis de un total de 1834 casos y chequearon cada uno de esos casos *por computadora*. Naturalmente, una demostración matemática 'asistida por computadora' provocó variadas discusiones alrededor de la pregunta '¿qué es una demostración matemática?', que están fuera del alcance de este trabajo.

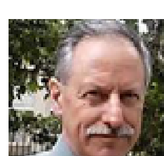
La asociación de los grafos, por ejemplo, con el análisis de redes de desagüe es casi instantáneo: en ese caso, obviamente, los grafos son usualmente planos (no hace en general falta, al menos en primera instancia, la dimensión adicional dada por la profundidad). Obviamente –también como grafo plano–, una red se puede extender al seguimiento de rutas de vehículos de transporte automotor urbano, de ferrocarriles urbanos, de subterráneos (aunque, en este caso, es posible que según la red el grafo no sea más plano sino en tres dimensiones). Y por supuesto para líneas de ferrocarril regionales, nacionales e internacionales. Todos temas en los cuales interviene la geografía. Las aristas del grafo pueden representar distancias, o capacidad máxima transportable en un momento dado a través de la arista, u otra restricción, o varias de ellas juntas. Según razones físicas o reglamentarias, se pueden probar teoremas que faciliten el diseño de la red.

Otro interesante ejemplo de geografía 'incitando' avances matemáticos es el que dan Frederick Rickey y Philip Tuchinsky en un trabajo de 1980 ('An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant', *Mathematics Magazine*, 53 (3): 162-166). La integral indefinida de la secante de un ángulo α es el logaritmo del valor absoluto de la secante de dicho ángulo α más su tangente, más una constante:

$$(\int \sec \alpha \, d\alpha = \ln \left| \sec \alpha + \tan \alpha \right| + c$$

como corresponde cuando uno trabaja con integrales indefinidas). Sin entrar a analizar la historia de esta 'incitación' (que se lee amenamente en el trabajo citado), lo cierto es que los conocimientos acumulados de geógrafos y navegantes (usando los avances ya realizados por Mercator) inspiraron a Henry Bond (que se autodefinía como 'maestro de navegación, agrimensura y otras partes de la matemática') en 1645 a conjeturar dicha fórmula (para ser más precisos, usaba otra ecuación trigonométricamente idéntica a la que antes mencioné, $\ln \left|\tan(\alpha/2 + \pi/4)\right|$), gracias a lo cual Isaac Barrow dedujo correctamente la fórmula de la integral. Nótese que en esa época obtener fórmulas explícitas (y calculables) de integrales de funciones era mucho más importante que ahora, pues no existían las computadoras, a partir de las cuales se diseñaron métodos de integración numérica muy eficientes, o sea, tener valores razonables (que sí se podían obtener a partir de logaritmos de funciones trigonométricas) de integrales de funciones trigonométricas era extremadamente útil.

La estadística es otra rama de las matemáticas que ayuda a la geografía (admitiendo que la estadística es una rama de las matemáticas, por supuesto: se puede pensar también la estadística como una ciencia natural, la más matematizada de todas –más que la física, incluso–, pero esa es otra discusión que nos aleja del meollo de este trabajo): si bien los censos son muy importantes, y la recomendación de la Dirección de Estadísticas de las Naciones Unidas es que se haga un censo nacional cada diez años, muchas veces se requieren datos poblacionales alejados de la fecha de los censos (por ejemplo, emigraciones o inmigraciones súbitas, crecimiento y decrecimiento humano producidos y estimados para el futuro), para los cuales encuestas bien hechas, con una base teórica estadística sólida, dan resultados que pueden ser excepcionalmente precisos. En cuanto a geografía urbana, la estadística ocupa un lugar importante en este ámbito: herramientas de estadística usadas son análisis multivariado de agrupamientos (*multivariate cluster analysis*), análisis de regresión, etcétera. Y en hidráulica fluvial, por ejemplo, la estadística puede ser muy útil para averiguar si –debido por ejemplo al calentamiento global– en algún río importante, por ejemplo, el Paraná, hay cambios temporales, que puedan llevar a suponer tendencias futuras, en las alturas medias del río en distintos puntos de medición, con obvias consecuencias, entre otras cosas, en previsiones sobre posibilidad de navegación por ese río por barcos de determinado calado. CH



Pablo Miguel Jacovkis

Doctor en matemáticas, UBA.
Profesor emérito, UBA.
Secretario de Investigación y Desarrollo de la Universidad Nacional de Tres de Febrero (UNTREF).
pablo.jacovkis@gmail.com